ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ ARASINAV SORULARI

1) $k=1,2,\ldots$ için (X_k,d_k) metrik uzaylar ve $X=X_1\times X_2\times\ldots$ olmak üzere $x=(x_1,x_2,\ldots)$, $y=(y_1,y_2,\ldots)\in X$ için

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\min\{1,d_k(x_k,y_k)\}}{2^k}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu veriliyor.

a) d nin iyi tanımlı olduğunu,

b) (X,d) nin metrik uzay olduğunu gösteriniz.

2) $f,g:(X,d)\to(Y,m)$ sürekli fonksiyonlar ise $A=\{a\in X: f(a)=g(a)\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

3) (X,d), (Y,m) metrik uzaylar ise $Z=X\times Y$ üzerinde $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)\in Z$ için

$$\rho(z_1,z_2)=\sqrt{[d(x_1,x_2)]^2+[m(y_1,y_2)]^2}$$

verilsin.

a) (Z,ρ) nun metrik uzay olduğunu gösteriniz.

b) $z_n=((x_n,y_n))\xrightarrow{\rho} z=(x,y)\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{d} x$ ve $y_n\xrightarrow{m} y$ olduğunu gösteriniz.

4) Aşağıdakilerden hangisi $C[-1,1]$ in alt uzayıdır? Nedenini açıklayınız.

$A=\{f\in C[-1,1]: f \text{ diferansiyellenebilir}\}$

$B=\{f\in C[-1,1]: \forall x\in[-1,1] \text{ için } f(-x)=f(x)\}$

$A=\{f\in C[-1,1]: f(x)\geq 0\}$

5) Aşağıdaki dizilerden hangileri l_2 nin elemanlarıdır? Nedenini açıklayınız.

a) $(1,1,1,\ldots,0,0,\ldots)$ b) $(1,1,1,\ldots)$ c) $\left(\frac{1}{n}\right)$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e) $\left(\frac{1}{3^n}\right)$

6) $x=(x_1,x_2,\ldots)$ olmak üzere

$$X=\left\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}|x_{k+1}-x_k|<\infty,\ (x_k)\subset\mathbb{C}\right\}$$

verilsin. $x\in X$, $\|x\|=|x_1|+\sum_{k=1}^{\infty}|x_{k+1}-x_k|$ olmak üzere $(X,\|.\|)$ nin bir normlu uzay olduğunu gösteriniz.

Not: Sınav **26.04.2021** Pazartesi günü **15:00-17:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. 3. ve 5. sorular 20 şer, diğerleri 15 er puandır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

FONKSİYONEL ANALİZ ARASINAV ÇÖZÜMLER

1) $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_k(x_k,y_k)\}}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, $\sum \frac{1}{2^k}$ geometrik

serisi yakınsak olduğundan $d(x,y)$ iyi tanımlıdır.

M1. Serinin tüm terimleri negatif olmadığından $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ dır.

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_k(x_k,y_k)\}}{2^k} = 0$$

$\Leftrightarrow \forall k=1,2,\dots$ için $\min\{1, d_k(x_k,y_k)\} = 0$

$\Leftrightarrow \forall k=1,2,\dots$ için $d_k(x_k,y_k)=0$

$\Leftrightarrow \forall k=1,2,\dots$ için $x_k = y_k$

$\Leftrightarrow x=y$

M2. $d_k(x_k,y_k) = d_k(y_k,x_k)$ olduğundan $d(x,y)=d(y,x)$ dır.

M3. $\forall x,y,z \in X$ için

$$d(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_k(x_k,z_k)\}}{2^k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_k(x_k,y_k)\}}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_k(y_k,z_k)\}}{2^k}$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

2) $A=\{a\in X : f(a)=g(a)\}$ nın kapalı olduğunu göstermek için $X-A$ nın açık olduğunu göstermeliyiz. $x\in X-A$ alalım. $\Rightarrow$ $f(x) \neq g(x)$ dır. $\Rightarrow m(f(x),g(x)) = \alpha > 0$ dır. f ve g fonksiyonları x noktasında sürekli olduğundan her $y \in B(x,r)$ için

$$m(f(x), f(y)) < \frac{\alpha}{2}, \quad m(g(x), g(y)) < \alpha/2$$

olacak şekilde bir $r>0$ sayısı vardır. Şimdi her $y \in B(x,r)$ için $f(x) \neq g(x)$, yani $B(x,r) \subset X-A$ ve dolayısıyla $X-A$ nın açık olduğu gösterilmiş olacak. Aksine en az bir $x_1 \in B(x,r)$ için $f(x_1) = g(x_1)$ olsaydı, üçgen eşitsizliği gereği

$$m(f(x),g(x)) \leq m(f(x), f(x_1)) + m(g(x_1), g(x)) < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

bulunur ki bu $m(f(x),g(x)) = \alpha$ ile çelişir.

a)

3) M1. $\rho(z_1,z_2)=0 \iff \sqrt{[d(x_1,x_2)]^2+[m(y_1,y_2)]^2}=0$

$\iff d_1(x_1,x_2)=0,\ m(y_1,y_2)=0$

$\iff x_1=x_2,\ y_1=y_2$

$\iff z_1=z_2$

M2. d, m metrik olduğundan $d(x_1,x_2)=d(x_2,x_1)$, $m(y_1,y_2)=m(y_2,y_1)$

$\Rightarrow \rho(z_1,z_2)=\rho(z_2,z_1)$ olur.

$z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$, $z_3=(x_3,y_3)$

M3. $\rho(z_1,z_2)=\sqrt{[d(x_1,x_2)]^2+[m(y_1,y_2)]^2}$

$\leq \sqrt{[d_1(x_1,x_3)+d(x_3,x_2)]^2+[m(y_1,y_3)+m(y_3,y_2)]^2}$

Minkowski eşitsizliği (p=2 hali) $\leq \sqrt{[d(x_1,x_3)]^2+[m(y_1,y_3)]^2}+\sqrt{[d(x_3,x_2)]^2+[m(y_3,y_2)]^2}$

$=\rho(z_1,z_3)+\rho(z_3,z_2)$

b) $x_n \xrightarrow{d} x$, $y_n \xrightarrow{m} y$ olsun. $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n>n_0$ için

$d(x_n,x)<\varepsilon$, $m(y_n,y)<\varepsilon$.

$\Rightarrow \forall n>n_0$ için $\rho(z_n,z)=\sqrt{[d(x_n,x)]^2+[m(y_n,y)]^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}=\sqrt{2\varepsilon^2}$

$\Rightarrow \forall n>n_0$ için $\rho(z_n,z)<\sqrt{2}.\varepsilon \Rightarrow z_n \xrightarrow{\rho} z$ dır.

Tersine, $z_n \xrightarrow{\rho} z$ olsun. $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n>n_0$ için $\rho(z_n,z)<\varepsilon$.

$\Rightarrow \forall n>n_0,\ \sqrt{[d(x_n,x)]^2+(m(y_n,y))]^2}<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n>n_0,\ d(x_n,x)<\varepsilon,\ m(y_n,y)<\varepsilon \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x,\ y_n \xrightarrow{m} y$ dır.

4) A ve B alt uzaydır. C alt uzay değildir, çünkü skalerle çarpma işlemine göre kapalı değildir. Yani
$\forall f \in C[-1,1]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha.f \notin C[-1,1]$ dir.
çünkü α negatif olduğunda $\alpha.f(x) \geq 0$ olmaz.

. $f,g \in A$, türevlenebilen iki dönüşümün toplamı ve skalerle çarpımı da türevlenebilir old. $f+g \in A$, $\alpha f \in A$ dır.

. $f,g \in B \Rightarrow f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$ old. $f+g \in B$ dır.

$(\alpha.f)(x)=\alpha.f(x)=\alpha.f(-x)=(\alpha f)(-x) \Rightarrow \alpha f \in B$ dır.

⑤ (a) Dizinin sıfırdan farklı terimlerinin sayısı k ise dizinin terimlerinin karelerinin toplamı k dır. Dolayısıyla bu dizi ℓ_2 nin elemanıdır.

(b) $x_k = (1,1,\dots)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 1^2+1^2+\dots = \sum 1$ serisi ıraksaktır.

$\Rightarrow x_k \notin \ell_2$ dir.

(c) $x_k = \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum \frac{1}{k^2} < \infty \Rightarrow x_k \in \ell_2$ dir.

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^2 = \sum \frac{1}{k}$ ıraksak $\Rightarrow x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $x_k \notin \ell_2$.

(e) $x_k = \frac{1}{3^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{2}$ old. $x_k = \frac{1}{3^k} \in \ell_2$ dir.

⑥ Mutlak değerin özelliklerinden dolayı

N1: her $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ için $\|x\| \geq 0$ dır.

$x = (0,0,\dots) = 0$ ise $\|x\| = 0$ olur.

$\|x\| = 0 \Rightarrow |x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_{k+1} - x_k| = 0$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$, yani $x = 0$ olur.

N2. $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, $\alpha \in F$ için $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$

$\|\alpha x\| = |\alpha x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_{k+1} - \alpha x_k|$

$= |\alpha| . |x_1| + |\alpha| . \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| = |\alpha| . \|x\|$

N3. $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ için , bir $n \in \mathbb{N}$ için

$\sum_{k=1}^{n} |(x_{k+1} + y_{k+1}) - (x_k + y_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_{k+1} - y_k|$

ve $|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$ old.,

$\|x+y\| = |x_1 + y_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} + y_{k+1}) - (x_k + y_k)|$

$\leq |x_1| + |y_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - y_k|$

$= \|x\| + \|y\|$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir.